



SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PROPAGAÇÃO DE COLAPSO EM CASCAS CILÍNDRICAS SOB PRESSÃO HIDROSTÁTICA

Ilson P. Pasqualino

Segen F. Estefen

Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Oceânica

Cx. P. 68508 - 21945-970 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Resumo. *O trabalho trata do desenvolvimento de um programa computacional para a simulação do colapso propagante em dutos submarinos para águas profundas. A formulação do problema é desenvolvida com o auxílio da teoria de cascas finas, incorporando grandes rotações, comportamento elasto-plástico do material para pequenas deformações e carregamento não-conservativo. As equações de equilíbrio são resolvidas numericamente a partir da implementação de um programa computacional que utiliza o método das diferenças finitas associado à técnica iterativa da relaxação dinâmica. O comportamento pós-colapso da estrutura é determinado a partir de técnica de controle de comprimento de arco em regiões convolutas da curva carga versus deslocamento. Os resultados numéricos são comparados com testes laboratoriais realizados em modelos em escala reduzida.*

Palavras-chave: *Colapso Propagante, Dutos Submarinos, Relaxação Dinâmica*

1. INTRODUÇÃO

O colapso propagante em cascas cilíndricas sob pressão hidrostática é um fenômeno de pós-colapso que configura a falha progressiva de toda a estrutura. Uma vez iniciado o colapso numa determinada região da casca, o mesmo se propaga em ambas as direções, desde que a pressão externa atuante seja superior a um valor mínimo denominado pressão de propagação.

A possibilidade de ocorrência de colapso propagante em dutos submarinos para águas profundas (lâminas d'água superiores a 500m), aliado à disponibilidade ainda limitada de recursos remotos de reparo, tem conduzido os projetistas a dimensionar tais estruturas pela sua pressão de propagação, em substituição à pressão de colapso. Tal procedimento ocasiona um projeto bastante conservador, gerando espessuras muito grandes, visto que a pressão de colapso é da ordem de três a cinco vezes a pressão de propagação.

Jensen (1988) realizou o primeiro estudo teórico e numérico do sólido tridimensional na obtenção da pressão de propagação. Aplicou a teoria de casca simplificada pelas hipóteses de Love-Kirchhoff para pequenas deformações e deslocamentos finitos utilizando a teoria de fluxo na representação do comportamento elasto-plástico do material. Entretanto, nenhuma comparação com resultados experimentais foi realizada.

Os primeiros modelos tridimensionais pelo método dos elementos finitos foram realizados por Tassoulas et al. (1990) e Song & Tassoulas (1991). Utilizaram teoria de casca para deslocamentos e deformações finitas associada à teoria de fluxo com encruamento isotrópico. Controlaram o processo na região instável de carregamento a partir de incrementos de volume e definiram a variação de pressão externa como sendo mais um grau de liberdade do elemento utilizado. Os resultados correlacionados limitaram-se a dutos com relação entre diâmetro externo e espessura (D/t) superior a 35.

Dyau & Kyriakides (1993) apresentaram análise numérica bem convincente utilizando o método de Rayleigh-Ritz. A superfície do tubo foi modelada a partir da teoria de casca proposta por Sanders (1963), envolvendo pequenas deformações e grandes deslocamentos. O comportamento elasto-plástico do material foi descrito pela teoria de fluxo com encruamento isotrópico. O princípio dos trabalhos virtuais foi utilizado na forma incremental para a obtenção das integrais de equilíbrio do sistema. Os resultados obtidos apresentaram boa estimativa da pressão de propagação ao serem correlacionados com dados experimentais de cinco modelos de alumínio AL-6061-T6 e aço inoxidável SS-304 com relações D/t variando de 18,2 a 37,2. Foram também realizadas simulações bem sucedidas de testes experimentais de pressão de propagação com tração (Kyriakides & Chang, 1992).

Este trabalho aborda o problema de propagação de colapso em dutos submarinos a partir de um estudo teórico associado a uma técnica numérica de solução das equações de equilíbrio. O objetivo principal é a implementação de um método numérico alternativo para a determinação da pressão de propagação em dutos com relação D/t superior a 16 (Pasqualino, 1998). O procedimento adotado consiste da discretização do contínuo pelo método das diferenças finitas associada à técnica explícita da relaxação dinâmica na solução das equações não-lineares de equilíbrio. A resposta da estrutura no regime de pós-colapso é obtida empregando-se o método do controle de comprimento de arco.

2. MODELO TEÓRICO

A abordagem teórica do problema de propagação em dutos submarinos constitui no desenvolvimento de formulação que envolva as deformações de flexão e membrana das seções transversais, assim como as deformações longitudinais na região entre as seções pré e pós-colapso. Por esse motivo foi desenvolvido um modelo tridimensional baseado na teoria de cascas finas de Sanders (1963), incorporando deslocamentos finitos, pequenas deformações e carregamento não-conservativo.

O problema consiste da análise de uma casca cilíndrica circular de raio de superfície média R , com espessura constante t e comprimento L . Para pontos da superfície média da casca são calculados os deslocamentos lineares u , v e w correspondentes às direções axial, circunferencial e radial, respectivamente.

As relações cinemáticas e equações de equilíbrio são obtidas a partir das equações gerais da teoria de cascas finas incorporando deformações e deslocamentos finitos (Sanders, 1963), simplificando-as para pequenas deformações. As forças de cisalhamento são eliminadas a partir da substituição das equações de equilíbrio de momentos nas demais. As cinco originais se reduzem a três equações que serão utilizadas para determinar o equilíbrio de forças e momentos para cascas cilíndricas circulares.

A pressão hidrostática é o único carregamento a ser utilizado no problema de propagação de colapso. As equações de Sanders adotam carregamento conservativo e são inadequadas para serem empregadas em análises de grandes rotações, onde a pressão atuante permanece normal à superfície média deformada. Para a utilização do carregamento não-conservativo é necessário empregar as componentes do vetor unitário normal à superfície média deformada. Termos obtidos pelo produto da pressão hidrostática p pelas componentes deste vetor são

agregados às respectivas equações de equilíbrio, compondo dessa forma o carregamento não-conservativo de pressão externa.

No regime elasto-plástico do material as relações tensão-deformação incrementais são deduzidas a partir de um modelo teórico que incorpora a lei fluxo potencial e associada, pequenas deformações e o critério de escoamento de Von Mises com encruamento isotrópico. Essas relações são empregadas em integrais que fornecem os incrementos de forças e momentos resultantes. Tais equações correspondem às relações constitutivas no regime plástico, dadas em função das deformações de membrana e flexão e das rigidezes elasto-plásticas integradas ao longo da espessura.

3. MÉTODO NUMÉRICO

As equações de equilíbrio são resolvidas numericamente a partir de um método vetorial iterativo denominado relaxação dinâmica, que transforma um problema estático em dinâmico pela adição de densidades fictícias e amortecimento crítico. Aliado à técnica da relaxação dinâmica é empregado o método das diferenças finitas na discretização do contínuo. Sua natureza explícita dispensa operações matriciais e permite a vetorização do sistema de equações, poupando espaço de memória e simplificando a formulação do problema. No entanto, dependendo do grau de não-linearidade do problema, o número de iterações pode ser muito elevado.

Na solução numérica do problema de pós-colapso é proposta uma metodologia geral para a obtenção da história de carregamento versus deslocamento. A técnica é baseada no método do comprimento de arco proposto por Riks (1979) e adapta-se perfeitamente ao método da relaxação dinâmica.

3.1 Relaxação Dinâmica

A técnica da relaxação dinâmica consiste em obter a parcela estática permanente da resposta dinâmica de um sistema excitado pela aplicação de uma carga repentina. As n equações dinâmicas de equilíbrio, correspondentes aos n graus de liberdade do sistema, são resolvidas para um amortecimento próximo ao crítico. Após algumas oscilações, as velocidades e acelerações tendem a zero e os deslocamentos resultantes representam a configuração deformada de equilíbrio. O método é muito utilizado na solução de problemas com alto grau de não linearidade geométrica e de material, incluindo análise de carga limite e descarregamento estrutural.

Malha de Diferenças Finitas. O artifício de superposição de malhas é adotado por aumentar a precisão das derivadas de primeira ordem nas aproximações por diferenças finitas. As diferentes incógnitas do problema são calculadas nas suas malhas específicas e linearmente interpoladas para as malhas vizinhas sempre que houver necessidade, Fig 1.

Na malha principal são calculados os deslocamentos w e as componentes normais de deformações, forças e momentos resultantes. Na malha secundária são calculadas as componentes cisalhantes de deformações, forças e momentos resultantes. As demais malhas definem os nós onde são resolvidas as equações de equilíbrio correspondentes às direções dos deslocamentos u e v .

A geometria da malha de diferenças finitas utiliza apenas 1/8 da área do sólido original, conforme apresentado na Fig. 1. Na sua geração são adotadas simetrias em relação ao plano transversal que divide o tubo ao meio e aos planos longitudinais que definem 1/4 da seção. A interseção desses planos com a superfície média do tubo geram as linhas de simetria.

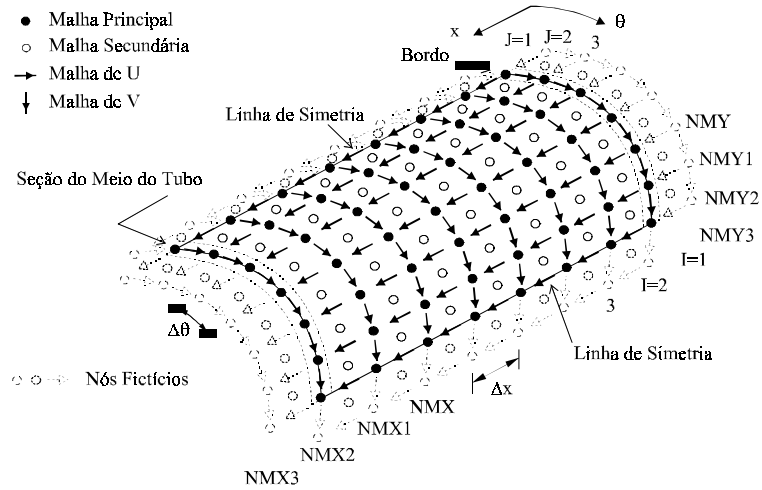


Figura 1 - Malha de diferenças finitas do modelo numérico.

Os espaçamentos nas direções axial Δx e circunferencial $\Delta \theta$ são constantes em toda a malha e definidos pelas variáveis NMX e NMY, respectivamente. A região de interesse está compreendida entre os nós que variam de $I=2$ a $I=NMX2$ na direção axial e os nós de $J=2$ a $J=NMY2$ que definem as linhas de simetria do tubo. Os nós fictícios correspondentes a $J=1$ e $J=NMY3$ são utilizados para definir as condições de simetria que permitem modelar 1/4 da seção transversal do tubo. Os nós correspondentes a $I=1$ e $I=NMX3$ são utilizados para definir a condição de contorno no bordo e a condição de simetria de meio tubo, respectivamente.

Formulação do Método. A técnica da relaxação dinâmica consiste na integração temporal das equações recursivas abaixo, representadas para o k -ésimo incremento de tempo,

$$\dot{q}^{k+1/2} = \frac{(2 - c\Delta t)}{(2 + c\Delta t)} \dot{q}^{k-1/2} + \frac{2M^{-1}r^k \Delta t}{(2 + c\Delta t)} \quad e \quad (1)$$

$$q^{k+1} = q^k + \dot{q}^{k+1/2} \Delta t, \quad (2)$$

na obtenção do vetor discreto de deslocamentos q , onde M é uma matriz diagonal ($n \times n$) de massa, r é o vetor de resíduos, c o coeficiente de amortecimento e o ponto significa derivada em relação ao tempo t . O vetor de resíduos, também conhecido como força de desbalanceamento, é dado na forma

$$r^k = P^k - F_{int}^k, \quad (3)$$

onde F_{int} é o vetor das forças internas e P o vetor das cargas externas. Quando o vetor velocidade \dot{q} torna-se nulo, obtém-se o equilíbrio estático correspondente a um resíduo também nulo, ou seja,

$$F_{int}^k - P^k = 0, \quad (4)$$

Os parâmetros c , M e Δt devem ser adequadamente selecionados para se obter boa convergência e manter a estabilidade numérica do método. O coeficiente de amortecimento deve ser próximo ao crítico para que em poucas iterações se obtenha $r^k \approx 0$.

Convergência e Estabilidade Numérica. Os procedimentos de obtenção dos parâmetros de convergência foram extraídos de Underwood (1983), que elaborou estudo criterioso sobre o assunto a partir de coletânea dos principais desenvolvimentos numéricos realizados.

A utilização de densidades fictícias garante boa convergência e principalmente a estabilidade numérica do método. A teoria baseia-se na aplicação do critério de estabilidade numérica que estabelece o incremento de tempo Δt pela desigualdade

$$\Delta t \leq 2/\sqrt{A_m} , \quad (5)$$

onde A_m é o maior autovalor da matriz A , definida por $A = M^{-1}K$ e K é a matriz de rigidez implícita no método das diferenças finitas. Com o auxílio do Teorema de Gerschgorin que estabelece um limite superior para o maior autovalor, define-se o limite inferior das densidades fictícias m_{ii} na forma:

$$m_{ii} \leq \frac{1}{4} \Delta t^2 \sum_{j=1}^n |k_{ij}| . \quad (6)$$

A metodologia utilizada na determinação dos limites de Gerschgorin pode ser verificada no trabalho realizado por Cassel & Hobbs (1976).

O coeficiente de amortecimento c deve ser o mais próximo possível do amortecimento crítico da estrutura. Para a obtenção deste parâmetro foi implementado um método automático de cálculo que atualiza seu valor a cada iteração. Consiste em determinar o coeficiente de amortecimento a partir do quociente de Rayleigh, utilizando a expressão

$$c = \sqrt{\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} / \mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q}} , \quad (7)$$

onde a matriz diagonal 1K é conhecida como matriz de rigidez “local”. Seus elementos são calculados a cada iteração a partir de

$${}^1K^k = \left[-\mathbf{F}_{int}^{k-1} + \mathbf{F}_{int}^k \right] / \Delta t \dot{\mathbf{q}}^{k-1/2} . \quad (8)$$

O valor calculado na Eq. (7) tende a oscilar um pouco, tornando-se mais eficiente utilizar a média dos valores obtidos no passo de carga na representação do amortecimento crítico da estrutura.

3.2 Método do Comprimento de Arco

O método do controle de comprimento de arco foi introduzido por Riks (1979) dando continuidade a trabalho realizado por Wempner (1971). Posteriormente foi adaptado por Crisfield (1981) para aplicação específica pelo método dos elementos finitos. Ramesh & Krishnamoorthy (1994) foram os pioneiros na aplicação do método em associação com a técnica da relaxação dinâmica, na obtenção da história de carregamento versus deslocamento no regime de pós-colapso. Em seu trabalho utilizaram uma condição de restrição baseada em valores totais da norma do vetor discreto de deslocamentos. Esta condição de restrição foi testada e mostrou-se inadequada na solução das equações de equilíbrio da casca. O processo iterativo de solução oscila muito causando a perda de convergência da análise. As aplicações apresentadas abrangeram estruturas elásticas bem simples com poucos graus de liberdade.

O método do comprimento de arco consiste em adicionar uma condição de restrição ao sistema de n equações de equilíbrio do problema, de modo a obter a solução de $n+1$ incógnitas, ou seja, os n graus de liberdade mais o fator de intensidade de carga Λ . A condição de restrição circular proposta por Crisfield (1981) foi considerada adequada para aplicação no método da relaxação dinâmica,

$$\|\delta\mathbf{q}^{k+1}\|^2 + (\delta\Lambda^{k+1})^2 = S^2, \quad (9)$$

onde δ significa incremento, S é o comprimento de arco.

Para modelos teóricos onde o carregamento externo é representado por única variável p , que neste caso é a pressão hidrostática, a carga atuante é definida em função de um valor constante de referência p_{ref} pela expressão

$$p^k = \Lambda^{k+1} p_{ref}. \quad (10)$$

Empregando as Eqs. (1) e (2) na forma incremental na Eq. (9), a condição de restrição transforma-se numa equação do segundo grau na forma

$$a_1 (\delta\Lambda_m^{k+1})^2 + a_2 \delta\Lambda_m^{k+1} + a_3 = 0, \quad (11)$$

onde seus coeficientes são dados em função dos parâmetros do problema. Caso seu discriminante seja positivo, serão obtidas duas raízes reais. Para determinar a raiz correta e evitar que a solução “retorne” na curva de carregamento, deve-se calcular os novos vetores de deslocamentos incrementais, utilizando as raízes obtidas. Em seguida determina-se os cossenos dos ângulos formados entre esses novos valores incrementais e a solução anterior. A raiz correta é aquela que gera o menor ângulo com a solução anterior, o que significa o maior cosseno.

A utilização do controle de comprimento de arco para a determinação dos incrementos de carga δp no método da relaxação dinâmica é bastante simples. A análise deve ser iniciada com incrementos de carga prescritos para a definição do parâmetro S na Eq. (9), a partir dos valores conhecidos de $\delta\mathbf{q}$ e $\delta\Lambda$. Nos passos de carga controlados pelo método de comprimento de arco a Eq. (11) é calculada ao final de cada iteração para a obtenção das raízes, proporcionando a determinação do incremento de pressão a ser utilizado na iteração seguinte. O passo de carga é finalizado à medida que o valor de δp converge.

3.3 Controle de Carregamento

Em análises de colapso de cascas cilíndricas circulares sob pressão externa deve-se definir imperfeições geométricas iniciais, de maneira que a seção transversal do tubo assuma o modo de falha característico. Essas imperfeições são obtidas pela equação $w_0 = w_{max} \cos(2\theta)$, onde θ é a coordenada angular do nó, w_{max} é a imperfeição máxima definida por $w_{max} = R\Delta_0$ e Δ_0 é a ovalização inicial considerada.

Na análise de propagação é necessário forçar a localização da falha no centro do tubo para posteriormente controlar sua propagação. Para isto basta prescrever uma ovalização inicial grande ($\sim 1\%$) para a seção central do tubo e bem pequena ($\sim 0,1\%$) para as demais seções, garantindo uma pressão de iniciação inferior na região central.

Deve ser definida uma estimativa da pressão de iniciação P_i , pois este limite superior é utilizado para estabelecer até que ponto os incrementos de pressão são prescritos. Essa estimativa pode ser obtida a partir da realização de uma análise adicional de pressão de colapso com a distribuição de imperfeições definida acima. As análises de colapso propagante podem ser divididas nas três fases descritas a seguir.

Fase 1. Na primeira fase os incrementos de pressão δp são prescritos até $0,75P_i$. Posteriormente inicia-se o controle de carregamento, onde os incrementos de arco S são utilizados para o cálculo de δp . Após atingido o ponto de carga limite ou pressão de iniciação, valores negativos de δp causam uma redução contínua na pressão total aplicada.

Fase 2. Transcorre no regime de pós-colapso onde a rotina de comprimento de arco permanece calculando incrementos de pressão negativos, até que as faces internas do tubo na seção central se toquem. Considerando a distribuição de imperfeições adotada, o grau de liberdade $w(NMX2,2)$ é o primeiro a registrar contato de faces, deixando de ser calculado e permanecendo com o valor prescrito de $-R+t/2$.

Fase 3. Após o primeiro contato das faces do tubo, a rotina de comprimento de arco passa a fornecer incrementos de pressão positivos, elevando a pressão total aplicada até um patamar que define a pressão de propagação P_p . Quando um nó encontra o plano longitudinal de simetria do tubo considera-se o fechamento de um contato. Automaticamente este nó permanece com o valor prescrito e deixa de ser calculado no restante da análise. Pode-se dizer que a linha longitudinal definida pelos graus de liberdade $w(I,2)$, onde $I=2,\dots,NMX2$, é o principal parâmetro de controle da propagação neste modelo.

4. CORRELAÇÃO DE RESULTADOS

A metodologia desenvolvida é avaliada a partir da comparação de resultados de pressão de propagação obtidos em análises numéricas com testes laboratoriais de modelos em escala reduzida (Estefen & Aguiar, 1994). Foram selecionados seis testes experimentais em modelos de aço com relações D/t iguais a 16, 21 e 24, cujas propriedades mecânicas e características geométricas estão apresentadas na Tabela 1, onde σ_0 é tensão de escoamento e E_t é o módulo tangente do material.

Tabela 1 - Propriedades mecânicas e geométricas dos modelos reduzidos.

Modelo	TSP16A	TSP16B	TSP21A	TSP21B	TSP24A	TSP24B
R (mm)	18,75	18,75	20,00	20,00	24,35	24,35
t(mm)	2,50	2,50	2,00	2,00	2,10	2,10
$\sigma_0(N/mm^2)$	342,00	295,20	228,58	281,03	452,93	326,51
$E_t(N/mm^2)$	2550,78	1364,21	613,33	453,44	1004,06	697,68

Os modelos de pressão de propagação são analisados numericamente no programa computacional desenvolvido, em versão compilada no sistema de grande porte Cray J90. A malha de diferenças finitas empregada nas análises de propagação é gerada com relação entre comprimento e diâmetro externo (L/D) igual a 24 e espaçamento circunferencial NMY igual a 6, resultando em 45 espaçamentos longitudinais NMX. As pressões de propagação são definidas após o fechamento completo de 12 seções adjacentes em meio tubo. A Fig. 2 apresenta a configuração deformada do modelo após a propagação, onde estão representadas as seções simétricas da malha analisada. Nota-se que a técnica adotada para a localização da

falha foi bastante eficiente, pois as seções distantes da região de falha permaneceram pouco afetadas pela pressão externa.

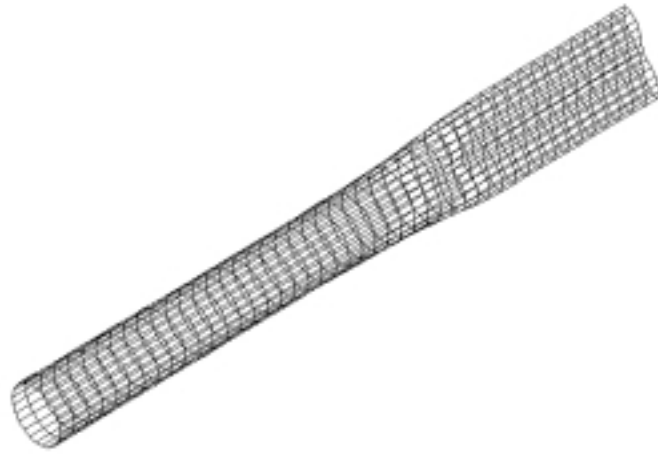


Figura 2 - Deformada representando meio tubo após a propagação.

O comportamento dos modelos numéricos durante as análises é melhor compreendido observando-se o gráfico da Fig. 3, que representa a variação do fator de intensidade de carga Λ com a norma do vetor de deslocamentos discretos q do modelo TSP24B. Esta curva define perfeitamente todas as fases do processo e é a partir dela que se determina a pressão de propagação do modelo. Pode-se verificar que partindo de uma condição descarregada a pressão é incrementada até que seja atingido o valor de iniciação. Posteriormente, pressões cada vez menores são calculadas até o toque das faces internas do tubo. No último estágio da análise, a pressão atuante sofre um pequeno acréscimo até definir um patamar que configura a pressão de propagação. O comportamento da pressão atuante nesta região é bastante oscilatório. Toda vez que uma nova seção se toca, a força de reação gerada induz a um acréscimo da pressão, que se estabiliza e volta a cair, configurando diversos pontos de carga limite. Caso a malha fosse refinada na direção longitudinal, essas oscilações seriam menores e mais próximas. Os resultados numéricos e experimentais da pressão de propagação estão apresentados na Tabela 2.

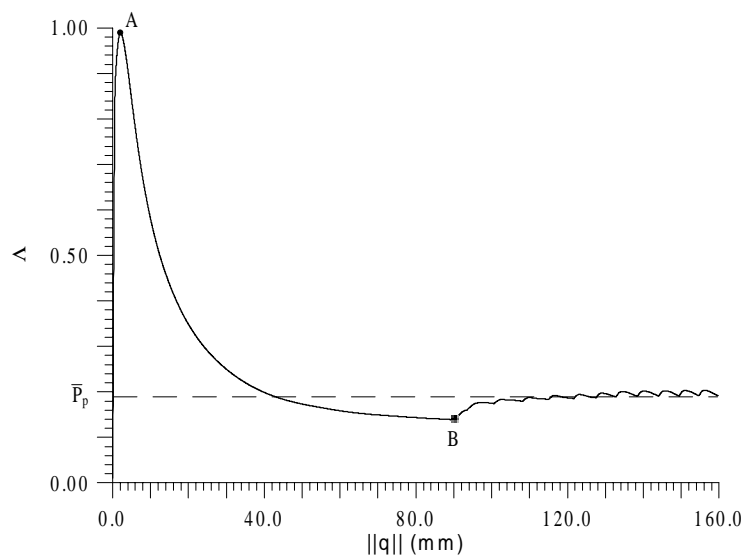


Figura 3 - Intensidade de carga versus norma dos deslocamentos do modelo TSP24B.

A comparação de resultados numéricos e laboratoriais validou o trabalho desenvolvido e a metodologia de solução empregada. As diferenças obtidas foram muito pequenas e os dois resultados que apresentaram maior discrepância não tenderam a subestimar ou superestimar a pressão de propagação. Além disso, todas as relações D/t apresentaram bons resultados, principalmente os modelos de D/t baixo, igual a 16. O refinamento e comprimento da malha adotado foi suficiente para a correta determinação do patamar de pressão de propagação. Caso o modelo fosse curto demais, este patamar tenderia a se elevar durante a propagação, pois haveria influência das condições de contorno. O comprimento destinado à propagação da falha, igual a três vezes o diâmetro, foi suficiente para definir a pressão de propagação.

Tabela 2 - Resultados numéricos \bar{P}_p e experimentais \hat{P}_p da pressão de propagação

Modelo	TSP16A	TSP16B	TSP21A	TSP21B	TSP24A	TSP24B
\hat{P}_p (N/mm ²)	14,38	11,72	5,01	5,08	4,31	3,81
\bar{P}_p (N/mm ²)	14,14	11,95	4,37	4,88	4,86	3,76
Diferença(%)	-1,67	1,96	-12,77	-3,94	12,76	-1,31

5. CONCLUSÃO

Foi apresentada uma metodologia numérica inovadora para a solução do problema de propagação de colapso em dutos submarinos, implementado-se um programa computacional de diferenças finitas associado à técnica da relaxação dinâmica. O método de controle de comprimento de arco foi adaptado para a obtenção do comportamento pós-colapso da estrutura. Técnicas de cálculo dos parâmetros de convergência do método da relaxação dinâmica foram utilizadas para manter a estabilidade numérica do processo iterativo de solução.

A implementação da técnica da relaxação dinâmica em associação com o método do comprimento de arco forneceu resultados bastante confiáveis em análises de pós-colapso em cascas cilíndricas circulares. Este método é facilmente aplicável para estruturas de geometria simples, porém com alto grau de não-linearidade.

As análises de colapso propagante realizadas pelo programa computacional validaram a teoria desenvolvida e o método numérico empregado. Os resultados numéricos apresentaram boa correlação com os resultados de testes laboratoriais e não foi verificada a tendência de subestimar ou superestimar a pressão de propagação.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro de PETROBRAS, CAPES/MEC e dos programas RECOPE e PRONEX do Ministério de Ciência e Tecnologia.

REFERÊNCIAS

- Cassel, A.C. & Hobbs, R.A., 1976, Numerical Stability of Dynamic Relaxation Analysis of Non-Linear Structures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 10, pp. 1407-1410.
- Crisfield, M.A., 1981, A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through, Computers & Structures, v. 13, pp. 55-62.

- Dyau, J.Y. & Kyriakides, S., 1993, On the Propagation Pressure of Long Cylindrical Shells under External Pressure, *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 35, n. 8, pp. 675-713.
- Estefen, S.F., Aguiar, L.A.D., 1994, Determinação Experimental da Pressão de Propagação em Modelos de Aço, Laboratório de Tecnologia Submarina, COPPE/UFRJ, Relatório Coppetec ET-170216.
- Jensen, H.M., 1988, Collapse of Hydrostatically Loaded Cylindrical Shells, *International Journal of Solids and Structures*, v. 24, n. 1, pp. 51-64.
- Koiter, W.T., 1970, On the Foundations of the Linear Theory of Thin Elastic Shells I, II, *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Series B, v. 73, pp. 169-195.
- Kyriakides, S. & Chang, Y.C., 1992, On the Effect of Axial tension on the Propagation Pressure of Long Cylindrical Shells, *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 34, n. 1, pp. 3-15.
- Pasqualino, I.P., 1998, Propagação de Colapso em Cascas Cilíndricas sob Pressão Hidrostática, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Ramesh, G. & Krishnamoorthy, C.S., 1993, Post-Buckling Analysis of Structures by Dynamic Relaxation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 36, 1339-1364.
- Riks, E., 1979, An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems, *International Journal of Solids and Structures*, v. 15, n. 7, pp. 529-551.
- Sanders, J.L., 1963, Nonlinear Theories of Thin Shells, *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 21, n. 1, pp. 21-36.
- Song, H.W. & Tassoulas, J.L., 1991, Dynamics of Propagating Buckles in Deep-Water Pipelines, *Proceedings of Offshore Mechanics and Arctic Engineering Conference*, ASME, June, Stavanger, Norway, v. 5, pp. 187-192.
- Tassoulas, J.L., Katsounas, A.T. and Song, H.W., 1990, Finite Element Analysis of Propagating Buckles in Deepwater Pipelines, *Offshore Technology Conference*, 6413, May 7-10, Houston, Texas, USA.
- Underwood, P., 1983, Dynamic Relaxation, in *Computational Methods for Transient Analysis*, eds T. Belytschko and T.J.R. Hughes, North-Holland, Amsterdam.
- Wempner, G.A., 1971, Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids, *International Journal of Solids and Structures*, v. 7, pp. 1581-1599.

NUMERICAL SIMULATION OF BUCKLE PROPAGATION OF HYDROSTATICALLY LOADED CYLINDRICAL SHELLS

Abstract. *The work presents the development of a computer program to simulate the propagation of buckles in deep water submarine pipelines. The formulation of the problem is based on the nonlinear thin shell theory assuming large rotations, material elasto-plastic behaviour under small strains and following force loads. The numerical solution is obtained through the implementation of a finite difference computer program based on the dynamic relaxation method. In the post-buckling range the load-deflection path is described using the arc-length control procedure. Numerical results are compared with laboratory tests of small scale models.*

Keywords: *Buckle propagation, Submarine pipelines, Dynamic relaxation*